2. Ковариантное дифференцирование

2.1 Определение ковариантной производной

Напомним основные положения тензорной алгебры.
Тензорный закон преобразования имеет вид

$$T^{k_1'k_2'\ldots k_p'}_{l_1'l_2'\ldots l_q'} = \frac{\partial x^{k_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2'}}{\partial x^{i_2}}\ldots\frac{\partial x^{k_p'}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{l_1'}}\frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{l_2'}}\ldots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{l_q'}}T^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q} \qquad (2.1)$$

В частности для дважды ковариантного тензора имеем

$$T_{k'l'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}T_{ij} \qquad (2.2)$$

Найдем закон преобразования следующей конструкции

$$T_{i,j} \equiv \frac{\partial T_i}{\partial x^j}. \qquad (2.3)$$

Получаем

$$T_{i',j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial x^b}{\partial x^{i'}}T_b\right) = \frac{\partial x^a}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^b}{\partial x^{i'}}\frac{\partial T_b}{\partial x^a} + \frac{\partial x^a}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial x^b}{\partial x^{i'}}\right)T_b =$$

$$= \frac{\partial x^a}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^b}{\partial x^{i'}}\frac{\partial T_b}{\partial x^a} + \frac{\partial^2 x^b}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}T_b.$$

Отсюда видно, что данная конструкция не является тензором т.к. закон преобразования не совпадает с (2.2).

Т.о. мы доказали, что частная производная, в общем случае, не является тензорной операцией. Попытаемся определить новую производную, которую будем обозначать точкой с запятой $T_{i;j}$ и называть ковариантной производной, обладающую следующими свойствами:

1) ковариантная производная совпадает с частной производной в декартовой системе координат;

2) ковариантная производная есть тензорная операция.

Исходя из второго свойства, можем написать что $T_{k';l'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}T_{i;j}$, а, учитывая первое свойство предположим, что не штрихованная система координат $\{x^1,\ldots x^N\}$ является декартовой, тогда $T_{i;j} = T_{i,j}$. Объединяя эти два выражения получим

$$T_{k';l'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}T_{i,j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\frac{\partial T_i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\frac{\partial T_i}{\partial x^{l'}} = \frac{\partial}{\partial x^{l'}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}T_i\right) - T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{l'}\partial x^{k'}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{l'}}\left(T_{k'}\right) - T_{p'}\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{l'}\partial x^{k'}}$$

Введем обозначение

$$\Gamma^{p'}_{k'l'} = \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{l'} \partial x^{k'}}, \tag{2.4}$$

тогда выражение для ковариантной производной от ковектора примет вид

$$T_{k';l'} = T_{k',l'} - T_{p'} \Gamma^{p'}_{k'l'}. \tag{2.5}$$

Найдем выражение для ковариантной производной от вектора. Для этого поступим аналогичным образом, т.е. запишем

$$T^{k'}{}_{;l'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{l'}} T^{i}{}_{,j} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial T^{i}}{\partial x^{j}} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial T^{i}}{\partial x^{l'}} = \frac{\partial}{\partial x^{l'}} \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} T^{i} \right) - T^{i} \frac{\partial}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{l'}} \left(T^{k'} \right) - T^{m'} \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial}{\partial x^{p}} \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \right) = \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{l'}} - T^{m'} \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{p} \partial x^{i}}.$$

Покажем, что выражение $-\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{p} \partial x^{i}}$ по своей конструкции совпадает с (2.4). Для этого «перебросим» производную $\frac{\partial}{\partial x^{p}}$ на множитель $\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}}$.

Получаем

$$-\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{p} \partial x^{i}} = -\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial}{\partial x^{p}} \left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \right) + \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial}{\partial x^{p}} \left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}} \right) \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} =$$

$$= -\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial}{\partial x^{p}} \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{m'}} \right) + \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{l'} \partial x^{m'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} = -\frac{\partial \left(\delta^{k'}_{m'} \right)}{\partial x^{l'}} + \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{l'} \partial x^{m'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{l'} \partial x^{m'}}.$$

Т.о. мы получили, что

$$-\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x^{l'}} \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^{p} \partial x^{i}} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{l'} \partial x^{m'}} = \Gamma^{k'}_{m'l'}. \tag{2.6}$$

Тогда выражение для ковариантной производной от вектора определяется следующим выражением

$$T^{k'}{}_{;l'} = T^{k'}{}_{,l'} + \Gamma^{k'}_{m'l'} T^{m'}. \tag{2.7}$$

Выражения (2.5) и (2.7) определяют ковариантные производные от ковектора и вектора в произвольной системе координат, и значит, штрихи можно опустить. Выражения Γ^{k}_{ml}, которые определяются формулами (2.6), называются **символами Кристоффеля** или **связностями**.

При выводе формулы ковариантной производной от тензора типа (p,q) можно поступить также как и в первых двух случаях и получить следующее выражение

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q;m} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q,m} + \Gamma^{i_1}_{km} T^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \ldots + \Gamma^{i_p}_{km} T^{i_1 \ldots i_{p-1} k}_{j_1 \ldots j_q} - \Gamma^{k}_{j_1 m} T^{i_1 \ldots i_p}_{k j_2 \ldots j_q} - \ldots - \Gamma^{k}_{j_p m} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} k}. \tag{2.8}$$

Заметим тот факт, что ковариантная производная делает из тензора типа (p,q) тип (p,q+1).

2.2 Символы Кристоффеля и их свойства

Найдем закон преобразования символов Кристоффеля исходя из их определения (2.6). Для этого заметим, что формулы (2.6) получены из предположения, что система $\left\{x^1,...x^N\right\}$ - декартова, а $\left\{x^{1'},...x^{N'}\right\}$ - произвольная. Перейдем от декартовой системы координат в две произвольные $\left\{y^1,...y^N\right\}$ и $\left\{z^1,...z^N\right\}$.

Тогда для этих систем имеем следующие выражения из (2.6)

$$
{}_{(y)}\Gamma^k_{ml} = -\frac{\partial x^i}{\partial y^m}\frac{\partial x^p}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^p \partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^l \partial y^m}, \tag{2.9}
$$

$$
{}_{(z)}\Gamma^k_{ml} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^p}{\partial z^l}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^p \partial x^i} = \frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^l \partial z^m}, \tag{2.10}
$$

где ${}_{(y)}\Gamma^k_{ml}$ - символы Кристоффеля вычислены в произвольной системе координат $\left\{y^1,...y^N\right\}$, а ${}_{(z)}\Gamma^k_{ml}$ - в системе $\left\{z^1,...z^N\right\}$.

Рассмотрим выражение ${}_{(y)}\Gamma^k_{ml}\dfrac{\partial y^m}{\partial z^a}\dfrac{\partial y^l}{\partial z^b}$ тогда с учетом (2.9)

$$
{}_{(y)}\Gamma^k_{ml}\frac{\partial y^m}{\partial z^a}\frac{\partial y^l}{\partial z^b} = -\frac{\partial x^i}{\partial y^m}\frac{\partial x^p}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^p \partial x^i}\frac{\partial y^m}{\partial z^a}\frac{\partial y^l}{\partial z^b} = (\text{сумма по } m\, l) =
$$

$= -\dfrac{\partial^2 y^k}{\partial x^p \partial x^i}\dfrac{\partial x^i}{\partial z^a}\dfrac{\partial x^p}{\partial z^b} =$ сумма по p $= -\dfrac{\partial}{\partial z^b}\left(\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}\right)\dfrac{\partial x^i}{\partial z^a} =$ добавим и вычтем одно и тоже выражение $= -\dfrac{\partial}{\partial z^b}\left(\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}\right)\dfrac{\partial x^i}{\partial z^a} - \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial z^a \partial z^b}\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i} + \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial z^a \partial z^b}\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i} =$ перепишем второе слагаемое $= -\dfrac{\partial}{\partial z^b}\left(\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i}\right)\dfrac{\partial x^i}{\partial z^a} - \dfrac{\partial}{\partial z^b}\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^a}\right)\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i} + \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial z^a \partial z^b}\dfrac{\partial y^k}{\partial x^i} =$

$$
= -\frac{\partial}{\partial z^b}\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial z^a}\right) + \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^a \partial z^b}\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = -\frac{\partial^2 y^k}{\partial z^b \partial z^a} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^a \partial z^b}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}.
$$

Т.о. мы получили, что

$$
{}_{(y)}\Gamma^k_{ml}\frac{\partial y^m}{\partial z^a}\frac{\partial y^l}{\partial z^b} = -\frac{\partial^2 y^k}{\partial z^b \partial z^a} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^a \partial z^b}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}.
$$

Или

$$
{}_{(y)}\Gamma^k_{ml}\frac{\partial y^m}{\partial z^a}\frac{\partial y^l}{\partial z^b} + \frac{\partial^2 y^k}{\partial z^b \partial z^a} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^a \partial z^b}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}.
$$

Умножим это выражение на $\frac{\partial z^p}{\partial y^k}$, тогда

$$ {}_{(y)}\Gamma^k_{ml}\frac{\partial y^m}{\partial z^a}\frac{\partial y^l}{\partial z^b}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}+\frac{\partial^2 y^k}{\partial z^b\partial z^a}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}=\frac{\partial z^p}{\partial y^k}\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^a\partial z^b}\frac{\partial y^k}{\partial x^i} $$

Суммируя в правой части по k получаем

$$ {}_{(y)}\Gamma^k_{ml}\frac{\partial y^m}{\partial z^a}\frac{\partial y^l}{\partial z^b}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}+\frac{\partial^2 y^k}{\partial z^b\partial z^a}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^a\partial z^b}\frac{\partial z^p}{\partial x^i}. $$

Заметим, что справа, согласно (2.10), получился символ Кристоффеля ${}_{(z)}\Gamma^p_{ab}$. Т.е. мы получили закон преобразования символа Кристоффеля из одной произвольной системы координат в другую

$$ {}_{(z)}\Gamma^p_{ab}={}_{(y)}\Gamma^k_{ml}\frac{\partial y^m}{\partial z^a}\frac{\partial y^l}{\partial z^b}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}+\frac{\partial^2 y^k}{\partial z^b\partial z^a}\frac{\partial z^p}{\partial y^k}. \tag{2.11} $$

Из (2.11) следует, что символ Кристоффеля не является тензором в случае произвольных преобразованиях. Однако это не есть удивительный факт. Этого вполне можно было ожидать. Т.к. в выражении для ковариантной производной $T^k{}_{;l}=T^k{}_{,l}+\Gamma^k_{ml}T^m$ выражение слева тензор по определению. Первое слагаемое справа не тензор, значит, очевидно, что втрое слагаемое тоже не должно являться тензором, просто его закон преобразования такой, что не тензорная часть в законе преобразования для слагаемого $T^k{}_{,l}$ уничтожается не тензорной частью в законе преобразования слагаемого $\Gamma^k_{ml}T^m$.

Перепишем выражение (2.11) в принятых нами ранее обозначениях, т.е. переход из системы координат $\left\{x^1,...x^N\right\}$ в систему $\left\{x^{1'},...x^{N'}\right\}$.

$$ \Gamma^{p'}_{a'b'}=\Gamma^k_{ml}\frac{\partial z^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{b'}}+\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{b'}\partial x^{a'}}. \tag{2.12} $$

Введем в рассмотрение новый объект

$$ T^p_{ab}=\Gamma^p_{ab}-\Gamma^p_{ab}. \tag{2.13} $$

Его закон преобразования находится из (2.12) элементарно

$$ T^{p'}_{a'b'}=\Gamma^{p'}_{a'b'}-\Gamma^{p'}_{b'a'}=\Gamma^k_{ml}\frac{\partial z^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{b'}}+\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{b'}\partial x^{a'}}- $$

$$ -\Gamma^k_{lm}\frac{\partial z^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x^{b'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}-\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{a'}\partial x^{b'}}=\frac{\partial z^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{b'}}\left(\Gamma^k_{ml}-\Gamma^k_{lm}\right). $$

Т.е.

$$ T^{p'}_{a'b'}=\frac{\partial z^{p'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial x^{a'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{b'}}T^k_{ml}. \tag{2.14} $$

Из (2.14) видно, что (2.13) является тензором. Такая конструкция называется **тензором кручения**.

Заметим, что в случае симметричного символа Кристоффеля тензор кручения равен нулю тождественно.

2.3 Свойства ковариантной производной

Перечислим основные свойства ковариантной производной.

1) Ковариантное дифференцирование – линейная операция.
2) Ковариантная производная для тензора нулевого ранга (скаляра) совпадает с частной производной $f_{;l} = f_{,l}$.
3) Ковариантная производная от векторного поля A^i определяется выражением $A^i{}_{;j} = A^i{}_{,j} + \Gamma^i_{mj} A^m$.
4) Ковариантная производная от произведения тензоров определяется обычным выражением

$$\left(A^{(i)}_{(j)} R^{(m)}_{(l)} \right)_{;k} = \left(A^{(i)}_{(j)} \right)_{;k} R^{(m)}_{(l)} + A^{(i)}_{(j)} \left(R^{(m)}_{(l)} \right)_{;k} \tag{2.15}$$

Эти свойства позволяют получить выражения для ковариантной производной от тензора любого типа.

Пример

$$\left(A^i B_i \right)_{;k} = \left(A^i B_i \right)_{,k} = \left(A^i \right)_{,k} B_i + A^i \left(B_i \right)_{,k}$$

с другой стороны

$$\left(A^i B_i \right)_{;k} = \left(A^i \right)_{;k} B_i + A^i \left(B_i \right)_{;k} = \left(A^i{}_{,k} + \Gamma^i_{mk} A^m \right) B_i + A^i \left(B_i \right)_{;k}$$

Т.о.

$$\left(A^i \right)_{,k} B_i + A^i \left(B_i \right)_{,k} = \left(A^i{}_{,k} + \Gamma^i_{mk} A^m \right) B_i + A^i \left(B_i \right)_{;k}.$$

Раскрывая скобки

$$A^i \left(B_i \right)_{,k} = \Gamma^i_{mk} A^m B_i + A^i \left(B_i \right)_{;k}$$

Или

$$A^i \left(B_i \right)_{;k} = A^i \left(B_i \right)_{,k} - \Gamma^i_{mk} A^m B_i = A^m \left(B_m \right)_{,k} - \Gamma^i_{mk} A^m B_i$$

Тогда

$$A^m \left(B_m \right)_{;k} = A^m \left(B_{m,k} - \Gamma^i_{mk} B_i \right).$$

Так как это выражение должно быть справедливо для любого вектора, то получается следующая формула

$$\left(B_m \right)_{;k} = B_{m,k} - \Gamma^i_{mk} B_i .$$

Эта формула совпадает с (2.5)

Получите выражение для ковариантной производной от T_i^k.

Исходя $\left(T_i^k A^i\right)_{;m} = \left(T_i^k\right)_{;m} A^i + T_i^k \left(A^i\right)_{;m}$ с другой стороны $\left(T_i^k A^i\right)_{;m} = \left(T_i^k A^i\right)_{,m} + \Gamma_{pm}^k \left(T_i^p A^i\right)$ получаем

2.4 Геометрический смысл ковариантной производной

Частная производная $\frac{\partial A^k}{\partial x^i}$ не является тензором, так как получена недопустимой операцией. Вспомним определение производной от скалярной функции одного аргумента $\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. По этой аналогии мы, при определении частной производной, вычитали из конструкции $A^k + dA^k$, (которая определена в точке Q с координатами $x^i + dx^i$) вектор, A^k определенный в точке P с координатами x^i. Их разность dA^k **не является** вектором

$$dA^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} dx^i .$$

Здесь dA^k, $\frac{\partial A^k}{\partial x^i}$ не тензоры, а dx^i - тензор (вектор).

Чтобы получить тензорную операцию необходимо вычесть из конструкции $A^k + dA^k$ не вектор в т. P, а вектор в точке Q, который выступает в роли A^k, т.е. необходимо A^k из P перенести **параллельно** в т. Q. Т.о. необходимо оговорить какое изменение в компонентах A^k будет по определению рассматриваться как «отсутствия изменения» вектора A^k. Самое простое предположение, что отсутствие изменения в компонентах и есть неизменность самого вектора A^k, не приводит к удовлетворительному результату, т.к. зависит от выбора системы координат. В частности, на плоскости понятие параллельного переноса интуитивно понятно, однако при произвольном параллельном переносе компоненты вектора в полярной системе координат изменяются.

Обозначим «заменитель» A^k в т. Q в виде $A^k + \delta A^k$. Тогда разность конструкции $A^k + \delta A^k$ в т. Q и вектора A^k в т. P есть δA^k и также не является вектором (причина та же самая, по которой dA^k не есть вектор).

Для определения δA^k необходимо сделать ряд предположений. Очевидно, что δA^k зависит как от A^k так и от dx^i. Более того, если $A^k = 0$, то должно быть и $\delta A^k = 0$, также, если $dx^i = 0$, то необходимо $\delta A^k = 0$. Эти условия приводят к тому, что зависимость должна быть <u>однородной</u>. Пусть также она будет <u>линейной</u>. Тогда можно написать

$$\delta A^k = \gamma_{ij}^k A^i dx^j ,$$

где γ_{ij}^k набор неизвестных функций.

Отсюда получаем, что «заменитель» вектора A^k в точке Q имеет вид $A^k + \delta A^k = A^k + \gamma_{ij}^k A^i dx^j$.

Разность между конструкциями $\left(A^k + dA^k\right)$ и $\left(A^k + \delta A^k\right)$ обозначим как DA^k.

Т.о.

$$DA^k = \left(A^k + dA^k\right) - \left(A^k + \delta A^k\right) = \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} - \gamma^k_{ij} A^i\right) dx^j .$$

DA^k, по определению, является вектором и называется –

ковариантный дифференциал.

Тогда ковариантная производная есть

$$A^k{}_{;j} \equiv \nabla_j A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} - \gamma^k_{ij} A^i .$$

В пункте 2.1 мы получили, что $A^k{}_{;j} = \dfrac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} A^i$. Т.о. для согласования этих двух методов необходимо положить, что $\Gamma^k_{ij} = -\gamma^k_{ij}$. Причем из второго способа не следует симметричность символов Кристоффеля.

2.4 Аффинная связность и ее свойства

Определим аффинную связность как некоторый математический объект Γ^i_{kl},

преобразующийся по закону $\Gamma^{i'}_{k'l'} = \Gamma^m_{np}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{l'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{k'}\partial x^{l'}}$. Этот закон преобразования является линейным, но не однородным. Отметим также, что второе слагаемое симметрично по нижним индексам (k' и l').

Рассмотрим свойства введенного нами понятия.

1) Если в какой-то системе отсчета связность симметрична, т.е. $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, то и в любой другой системе отсчета она остается симметричной. Таким образом, симметричность связности — инвариантное свойство, т. е. Не зависит от выбора системы координат. Покажем это. Запишем закон преобразования для $\Gamma^{i'}_{l'k'}$:

$$\Gamma^{i'}_{l'k'} = \Gamma^m_{np}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{l'}\partial x^{k'}} = \text{[поменяем местами индексы n и p]} =$$

$$= \Gamma^m_{pn}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^p}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{l'}\partial x^{k'}} = \left[\Gamma^m_{np} = \Gamma^m_{pn}\right] = \Gamma^m_{np}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^p}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{l'}\partial x^{k'}} = = \Gamma^{i'}_{k'l'}$$

2) Рассматривая закон преобразования, можем заключить, что антисимметричность связности, напротив, зависит от системы координат, т. е. если связность антисимметрична в какой-то системе координат , это не значит, что она будет антисимметричной в другой системе координат.

3) Любую связность можно представить в виде суммы симметричной связности $\Gamma^i_{(kl)}$ и антисимметричного тензора $T^i_{[kl]}$ (тензора кручения):

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{lk}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}\right) = \Gamma^i_{(kl)} + T^i_{[kl]}.$$

Отметим также, что если $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, то $T^i_{[kl]} = 0$, т.е. имеем пространство без кручения.

4) Из-за неоднородного слагаемого в законе преобразования аффинную связность можно обратить в нуль в некоторой системе координат. В декартовой системе координат все $\Gamma^i_{kl} = 0$.

5) Если Γ^i_{kl} - связность, то можно ввести бесконечно много связностей вида $\widehat{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + B^i_{kl}$, где B^i_{kl} - произвольный тензор. Для каждой из этих связностей существует своя опреация ковариантного дифференцирования (для Γ^i_{kl} - $A^i_{;j} = A^i_{,j} + \Gamma^i_{mj}A^m$, для $\widehat{\Gamma}^i_{kl}$ - $A^i_{:j} = A^i_{,j} + \widehat{\Gamma}^i_{mj}A^m$).

Отметим некоторые следствия:

а) Разность любых двух связностей $\widehat{\Gamma}^i_{kl} - \widetilde{\Gamma}^i_{kl}$ - тензор.

б) Бесконечно малое изменение связности — тензор. $\widehat{\Gamma}^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + \delta\Gamma^i_{kl}$

6) Линейная комбинация связностей $\alpha\Gamma^i_{kl} + \beta\widehat{\Gamma}^i_{kl}$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$)является связностью тогда, и только тогда, когда $\alpha + \beta = 1$.

Докажем это утверждение.

Распишем линейную комбинацию через законы преобразования каждой из связностей

$$\alpha\Gamma^{i'}_{k'l'} + \beta\widehat{\Gamma}^{i'}_{k'l'} = \alpha\left(\Gamma^m_{np}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{l'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{k'}\partial x^{l'}}\right) +$$

$$+\beta\left(\widehat{\Gamma}^m_{np}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{l'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{k'}\partial x^{l'}}\right) =$$

$$= \left(\alpha\Gamma^m_{np} + \beta\widehat{\Gamma}^m_{np}\right)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{l'}} + (\alpha + \beta)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{k'}\partial x^{l'}}$$

С другой стороны, если мы хотим, чтобы линейная комбинация $\alpha\Gamma^i_{kl} + \beta\widehat{\Gamma}^i_{kl}$ была связностью, она должна подчиняться закону преобразования для связности

$$\alpha\Gamma^{i'}_{k'l'} + \beta\widehat{\Gamma}^{i'}_{k'l'} = \left(\alpha\Gamma^m_{np} + \beta\widehat{\Gamma}^m_{np}\right)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{l'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{k'}\partial x^{l'}}.$$

Сравнивая эти два выражения видим, что $\alpha + \beta = 1$.

Отметим, что $\alpha\Gamma^i_{kl}$ является связностью тогда, и только тогда, когда $\alpha = 1$.

2.5 Связность, согласованная с метрикой

Запишем ковариантную производную метрического тензора

$$g_{ik;l} = g_{ik,l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = 0$$

Используя циклическую перестановку, поменяем индексы: $i \to k, k \to l, l \to i$. Получим

$$g_{kl;i} = g_{kl,i} - g_{ml}\Gamma^m_{ki} - g_{km}\Gamma^m_{li} = 0$$

Далее, опять меняем индексы, переставляя их циклически: $k \to l, l \to i, i \to k$, и получаем

$$g_{li;k} = g_{li,k} - g_{mi}\Gamma^m_{lk} - g_{lm}\Gamma^m_{ik} = 0$$

Умножим $g_{ik;l}$ на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, а $g_{kl;i}$ и $g_{li;k}$ на $\frac{1}{2}$ и сложим

$$-\frac{1}{2}\left(g_{ik,l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} \right) + \frac{1}{2}\left(g_{kl,i} - g_{ml}\Gamma^m_{ki} - g_{km}\Gamma^m_{li} \right) + \frac{1}{2}\left(g_{li,k} - g_{mi}\Gamma^m_{lk} - g_{lm}\Gamma^m_{ik} \right) =$$
$$= 0$$

Учитывая то, что метрический тензор симметричен, перегруппируем выражение

$$\frac{1}{2}\left(g_{kl,i} + g_{li,k} - g_{ik,l}\right) - \frac{1}{2}g_{ml}\left(\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{ik}\right) + \frac{1}{2}g_{im}\left(\Gamma^m_{kl} - \Gamma^m_{lk}\right) + \frac{1}{2}g_{mk}\left(\Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{li}\right) = 0$$

Умножим всё на g^{sl}

$$\frac{1}{2}g^{sl}\left(g_{kl,i} + g_{li,k} - g_{ik,l}\right) - \frac{1}{2}g^{sl}g_{ml}\left(\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{ik}\right) + \frac{1}{2}g^{sl}g_{im}\left(\Gamma^m_{kl} - \Gamma^m_{lk}\right) + \frac{1}{2}g^{sl}g_{mk}\left(\Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{li}\right) =$$
$$= 0$$

Заметим, что $\frac{1}{2}g^{sl}g_{ml}\left(\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{ik}\right) = \frac{1}{2}\delta^s_m\left(\Gamma^m_{ki} + \Gamma^m_{ik}\right) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{ki} + \Gamma^s_{ik}\right)$.

Перепишем равенство

$$\frac{1}{2}g^{sl}\left(g_{kl,i} + g_{li,k} - g_{ik,l}\right) - \frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{ki} + \Gamma^s_{ik}\right) + g^{sl}g_{im}\frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{kl} - \Gamma^m_{lk}\right) + g^{sl}g_{mk}\frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{li}\right) = 0$$

Обозначим $\frac{1}{2}g^{sl}\left(g_{kl,i} + g_{li,k} - g_{ik,l}\right) = \{^s_{ik}\}$

$\frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{ki} + \Gamma^s_{ik}\right) = \Gamma^s_{(ik)}$ - симметричная часть

$\frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{kl} - \Gamma^m_{lk}\right) = \Gamma^m_{[kl]}$ - антисимметричная часть

$\frac{1}{2}\left(\Gamma^m_{il} - \Gamma^m_{li}\right) = \Gamma^m_{[il]}$ - антисимметричная часть

Перепишем с новыми обозначениями

$$\{^s_{ik}\} - \Gamma^s_{(ik)} + g^{sl}g_{im}\Gamma^m_{[kl]} + g^{sl}g_{mk}\Gamma^m_{[il]} = 0$$

Перенеся симметричную часть в правую сторону, получаем для неё выражение

$$\Gamma^s_{(ik)} = \{^s_{ik}\} + g^{sl}g_{im}\Gamma^m_{[kl]} + g^{sl}g_{mk}\Gamma^m_{[il]}$$

Добавим к обеим частям $\Gamma^s_{[ik]}$.

$$\Gamma^s_{(ik)} + \Gamma^s_{[ik]} = \{^s_{ik}\} + g^{sl}g_{im}\Gamma^m_{[kl]} + g^{sl}g_{mk}\Gamma^m_{[il]} + \Gamma^s_{[ik]}$$

Увидим, что

$\Gamma^s_{(ik)} + \Gamma^s_{[ik]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{ik} + \Gamma^s_{ki}\right) + \frac{1}{2}\left(\Gamma^s_{ik} - \Gamma^s_{ki}\right) = \Gamma^s_{ik}$

Тогда

$\Gamma^s_{ik} = \{^s_{ik}\} + g^{sl} g_{im} \Gamma^m_{[kl]} + g^{sl} g_{mk} \Gamma^m_{[il]} + \Gamma^s_{[ik]}$, где

$\{^s_{ik}\}$ - скобки Кристоффеля, симметричные по ik

$\Gamma^s_{[ik]}$ - антисимметрична по ik

Преобразуем выражение $g^{sl} g_{im} \Gamma^m_{[kl]} + g^{sl} g_{mk} \Gamma^m_{[il]}$. Вынесем g^{sl} за скобки

$g^{sl}\left(g_{im} \Gamma^m_{[kl]} + g_{mk} \Gamma^m_{[il]}\right)$

Заменим индексы $i \leftrightarrow k$

$g^{sl}\left(g_{km} \Gamma^m_{[il]} + g_{mi} \Gamma^m_{[kl]}\right)$

Увидим, что поскольку метрический тензор симметричен, то вся эта часть симметрична по ik.

Это означает, что антисимметричную связность можно выбрать любой, и тогда полученная связность будет параллельно переносить g_{ik}.

$\Gamma^s_{[ik]}$ - тензор. Если $\Gamma^s_{[ik]} \equiv 0$, то $\Gamma^s_{ik} = \{^s_{ik}\}$ - это единственная симметричная связность, согласованна с $g_{ik;l} = 0$.

Так как антисимметричная часть связности не влияет на геодезические (ни на «аффинно-метрические» параметры), мы можем написать

$$\Gamma^s_{ik} = \{^s_{ik}\} + g^{sl}\left(g_{im} \Gamma^m_{[kl]} + g_{mk} \Gamma^m_{[il]}\right)$$

По этой связности мы получаем одни и те же геодезические по $g_{ik;l} \neq 0$. Это означает, что данное условие является необходимым, но не достаточным для того, чтобы выражение $ds^q = g_{ik} dx^i dx^k$ согласовывалось с аффинной мерой длины вдоль каждой геодезической.

2.6 Связность в диагональной метрике

Запишем формулы для символа Кристоффеля в диагональной метрике. Имеем

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km}\left[g_{mj,i} + g_{im,j} - g_{ij,m} \right]$$

Рассмотрим несколько случаев:

а) $i \neq j \neq k$

m может принимать k значений. Перепишем формулу

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{k1}\left[g_{1j,i} + g_{i1,j} - g_{ij,1} \right] + \frac{1}{2} g^{k2}\left[g_{2j,i} + g_{i2,j} - g_{ij,2} \right] + \ldots + \frac{1}{2} g^{kk}\left[g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k} \right]$$

В данном случае, в g^{kk} суммы по k нет.

Так как у нас диагональная метрика, то, следовательно, отличными от нуля будут элементы, стоящие на диагонали, то есть, элементы с одинаковыми индексами. Таковыми у нас являются $\frac{1}{2} g^{kk}\left[g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k} \right]$. Поэтому запишем

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kk}\left[g_{kj,i} + g_{ik,j} - g_{ij,k} \right]$$

$g_{kj,i} = 0$, так как $j \neq k$

$g_{ik,j} = 0$, так как $i \neq k$

$g_{ij,k} = 0$, так как $i \neq j$

Следовательно,

$$\boxed{\Gamma_{ij}^{k} = 0}$$

б) $i = j \neq k$

$$\Gamma_{ii}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{m} g^{km}\left[g_{mi,i} + g_{im,i} - g_{ii,m} \right] = \frac{1}{2} \sum_{m} g^{km}\left[2g_{mi,i} - g_{ii,m} \right] = \frac{1}{2} g^{kk}\left[2g_{ki,i} - g_{ii,k} \right]$$

Суммирования в Γ_{ii}^{k} по I нет. Также $g_{ki,i} = 0$, так как $i \neq k$.

Из определения ковариантного и контравариантного тензора мы знаем, что $g_{ij} g^{jk} = \delta_{i}^{k}$. При $i = k$, $\delta_{i}^{k} = 1$. Отсюда $g^{kk} g_{kk} = 1$, и $g^{kk} = \frac{1}{g_{kk}} = \left(g_{kk} \right)^{-1}$. Поэтому, можно записать $\Gamma_{ii}^{k} = -\frac{1}{2} g^{kk} g_{ii,k} = -\frac{1}{2} \left(g_{kk} \right)^{-1} g_{ii,k}$

$$\boxed{\Gamma_{ii}^{k} = -\frac{1}{2} \frac{g_{ii,k}}{g_{kk}}}$$

в) $i \neq j = k$

$$\Gamma_{ki}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{m} g^{km}\left[g_{mk,i} + g_{im,k} - g_{ik,m} \right] = \frac{1}{2} g^{kk}\left[g_{kk,i} + g_{ik,k} - g_{ik,k} \right]$$

$g_{ik,k} = 0$, так как $i \neq k$

$$\Gamma_{ki}^{i} = \frac{1}{2} g^{kk} g_{kk,i} = \frac{1}{2} \left(g_{kk} \right)^{-1} g_{kk,i}$$

$$\Gamma^{i}_{ki}=\frac{1}{2}\frac{g_{kk,i}}{g_{kk}}$$

г) $i=j=k$

$$\Gamma^{k}_{kk}=\frac{1}{2}\sum_{m} g^{km}\left[g_{mk,k}+g_{km,k}-g_{kk,m}\right]=\frac{1}{2}g^{kk}\left[g_{kk,k}+g_{kk,k}-g_{kk,k}\right]=\frac{1}{2}g^{kk}g_{kk,k}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(g_{kk}\right)^{-1}g_{kk,k}$$

$$\boxed{\Gamma^{k}_{kk}=\frac{1}{2}\frac{g_{kk,k}}{g_{kk}}}$$

Пример.

Вычислим символы Кристоффеля на сфере радиуса R.

$dl^{2}=dr^{2}+r^{2}d\vartheta^{2}+r^{2}\sin^{2}\vartheta d\phi^{2},\quad dr^{2}=0$, поэтому

$dl^{2}=R^{2}d\vartheta^{2}+R^{2}\sin^{2}\vartheta d\phi^{2}$

Общая формула имеет вид: $dl^{2}=g_{ij}dx^{i}dx^{j}$

Точка на сфере имеет две степени свободы, так как для того, чтобы её задать, требуются два угла. Поэтому $i,j=1,2$.

$x^{1}\to\vartheta$, $x^{2}\to\phi$

$g_{11}=g_{\vartheta\vartheta}=R^{2}$

$g_{22}=g_{\phi\phi}=R^{2}\sin^{2}\vartheta$

Теперь найдём символы Кристоффеля.

$$\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta}=\Gamma^{1}_{11}=\frac{1}{2}\frac{g_{11,1}}{g_{11}}=\frac{1}{2}\frac{0}{R^{2}}=0$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\phi}=\Gamma^{1}_{12}=\frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{11}}=\frac{1}{2}\frac{0}{R^{2}}=0$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\phi\vartheta}=\Gamma^{1}_{21}=\frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{11}}=\frac{1}{2}\frac{0}{R^{2}}=0$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\phi\phi}=\Gamma^{1}_{22}=-\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{11}}=-\frac{1}{2}\frac{2R^{2}\sin\vartheta\cos\vartheta}{R^{2}}=-\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\Gamma^{\phi}_{\vartheta\vartheta}=\Gamma^{2}_{11}=-\frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{22}}=-\frac{1}{2}\frac{0}{R^{2}\sin^{2}\vartheta}=0$$

$$\Gamma^{\phi}_{\vartheta\phi}=\Gamma^{2}_{12}=\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{22}}=\frac{1}{2}\frac{2R^{2}\sin\vartheta\cos\vartheta}{R^{2}\sin^{2}\vartheta}=\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=ctg\,\vartheta$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\vartheta}=\Gamma^{2}_{21}=\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{22}}=\frac{1}{2}\frac{2R^{2}\sin\vartheta\cos\vartheta}{R^{2}\sin^{2}\vartheta}=\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=ctg\,\vartheta$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}=\Gamma^{2}_{22}=\frac{1}{2}\frac{g_{22,2}}{g_{22}}=\frac{1}{2}\frac{0}{R^{2}\sin^{2}\vartheta}=0$$

2.7 Геодезические кривые

Рассмотрим кривую, заданную параметрически: $x^i(\lambda)$. Перенесем касательный вектор $\frac{dx^i}{d\lambda}$ к этой кривой из точки $P(x^i)$ в точку $(P'^i + dx^i)$. Согласно определению параллельного переноса и учитывая геометрический смысл ковариантной производной, запишем изменение компонент касательного вектора:

$$\frac{dx^i}{d\lambda} + \gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}dx^l = \frac{dx^i}{d\lambda} - \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}dx^l.$$

С другой стороны, чтобы найти касательный вектор в точке $P(x^i + dx^i)$, можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора по λ, ограничиваясь первым порядком малости:

$$\frac{dx^i}{d\lambda} + \frac{d^2x^i}{d\lambda^2}d\lambda.$$

Чтобы вектор, касательный в начальной точке, был касательным и в других точках, необходимо, чтобы выражения (1) и (2) были равны:

$$\frac{dx^i}{d\lambda} - \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}dx^l = \frac{dx^i}{d\lambda} + \frac{d^2x^i}{d\lambda^2}d\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}d\lambda + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}dx^l = 0$$

или

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda} = 0. \qquad (*)$$

Последнее уравнение называется *уравнением геодезической*. Повторим использованное выше утверждение: кривая является геодезической, если параллельно переносимый вдоль неё вектор, бывший касательным к кривой в начальной точке, остаётся касательным везде.

Рассмотрим другой пример записи уравнения геодезической. Для этого обозначим касательный вектор $T^i \equiv \frac{dx^i}{d\lambda}$. Тогда уравнение геодезической выглядит так:

$$\nabla_T T^i = 0.$$

Значок $\nabla_T = T^j \nabla_j$ означает ковариантную производную по касательному направлению. Получим из этого выражения уравнение геодезической вида (*).

Вектор $\frac{dx^i}{d\lambda}$ может быть, например, скоростью. Тогда уравнение геодезической, с учётом формул выше, принимает вид:

$$\nabla_u u^i = u^j u^i{}_{;j} = 0.$$

Расписывая ковариантную производную $u^i{}_{;j}$ с учетом того $u^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ получаем (расписать подробно)

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = 0.$$

2.8 Геодезические кривые из принципа наименьшего действия

Рассмотрим движение свободной материальной точки в произвольном пространстве. Её функция Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q), \;\; U(q) = 0.$$

Её движения подчиняются уравнениям Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0.$$

Попробуем получить уравнение, схожее с уравнением (*), исходя из уравнений Эйлера-Лагранжа. Подставим в уравнения Эйлера-Лагранжа лагранжиан свободной частицы в произвольных координатах, при этом необходимо помнить, что метрический тензор - функция координат в явном виде, и следовательно, функция времени: $g = f(q(t))$.
Получим уравнение (расписать)

$$g_{kj} \ddot{q}^j + \dot{q}^j \dot{q}^i \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{1}{2} \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = 0.$$

Преобразуем его учитывая, что связность, согласованная с метрикой, имеет вид
$\Gamma^m_{ij} \equiv \frac{1}{2} g^{mk} \left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right].$
Тогда получаем

$$\ddot{q}^m + \dot{q}^j \dot{q}^i \Gamma^m_{ij} = 0.$$

Таким образом вышло, что движение свободной частицы - это движение по геодезической кривой.

2.9 Ковариантная производная от тензорных плотностей

П.1 Задача 1

Вычислим $g_{,i}$

$g_{,i} = \frac{\partial g}{\partial g_{kl}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}$

т.к. $det(g_{kl})$ зависит от q^i через компоненты g_{kl}

т.к $det(g_{kl})=g_{11}A^{11} + \cdots + g_{1N}A^{1N}$

или на любой другой строчке

$\frac{\partial g}{\partial g_{kl}}=A^{kl}$,где A^{kl}, A^{11},A^{1N} − алгебраические дополения

Обратная матрица

$g^{kl}=\frac{1}{g} \cdot A^{lk}$

Обратный порядок индексов (транспонированная матрица алгебраических доплонений)

Т.к. $g^{kl} = g^{lk}$ $=>g^{kl} = \frac{1}{g}A^{kl}$ $=>A^{kl} = g \cdot g^{kl}$ $=>\frac{\partial g}{\partial g_{kl}}=A^{kl}= g \cdot g^{kl}$ $=>$

$g_{,i} = g \cdot g^{kl} \cdot \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} = g \cdot g^{kl} \cdot g_{kl,i}$

Т.к. $g^{kl}g_{kl}=N$ => $g^{kl}g_{kl,i}+g^{kl}_{,i}g_{kl}=0$

$g^{kl}g_{kl,i} = -g^{kl}_{,i}g_{kl}$

$g_{,i} = g \cdot g^{kl} \cdot g_{kl,i} = -g \cdot g_{kl} \cdot g^{kl}_{,i}$

П.2 Выразим $g_{,i}$ через символ Кристоффеля

$g_{kl;i}=0$

$g_{kl,i} - \Gamma^m_{ki}g_{ml} - \Gamma^m_{li}g_{mk} = 0$

$g_{kl,i} = g_{ml}\Gamma^m_{ki} + g_{mk}\Gamma^m_{li}$

Из П.1

$g_{,i} = g \cdot g^{kl} \cdot g_{kl,i} = g(g^{kl}g_{ml}\Gamma^m_{ki} + g^{kl}g_{mk}\Gamma^m_{li}) == g(\Gamma^k_{ki} + \Gamma^l_{li}) = 2 \cdot g \cdot \Gamma^k_{ki}$

Где $g^{kl}g_{ml}=\delta^k_m$; $g^{kl}g_{mk} = \delta^l_m$

$$\boxed{g_{,i} = 2 \cdot g \cdot \Gamma^k_{ki}}$$

Тензорная плотность веса W

$\mathcal{F}^{k'}_{l'} = \mathcal{J}^{-w} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} \mathcal{F}^i_j$

$\mathcal{J}^{-w} = (det \frac{\partial x'}{\partial x})^w$

Т.к. $\mathcal{J} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$

Т.к $\int m\, d^n x = \int m\mathcal{J}\, d^n x'$

Тогда объект $F_l^k \equiv (g)^{w/2}\mathcal{F}_l^k$, где $F_l^k -$ тензор
Т.к. $g \equiv \det(g_{ij})$ есть скалярная тензорная плотность веса w=-2
$g' = \mathcal{J}^2 g$
$g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} g_{kl}$
Ковариантная производная от $g_{ij;k} \equiv 0$
Предположим, что $g_{;k} \equiv 0$
И выражение
$(M_m^m N_m^m)_{;i} \equiv (M_m^m)_{;i} \cdot N_m^m + M_m^m \cdot (N_m^m)_{;i}$
Справедливо для тензорных плотностей
Пусть $g_{;i} = g_{,i} + K_i \cdot g$, где $K_i -$ неизвестная функция
Что такое $g_{,i}$?
Из П.2:
$g_{,i} = 2 \cdot g \cdot \Gamma_{ki}^k \quad => g_{;i} = 2 \cdot g \cdot \Gamma_{ki}^k + K_i \cdot g$, *где* $g_{;i} \equiv 0 =>$
$2 \cdot \Gamma_{ki}^k + K_i \cdot = 0 =>$
$K_i = -2 \cdot \Gamma_{ki}^k \quad =>$

$$\boxed{g_{;i} = g_{,i} - 2g\Gamma_{ki}^k}$$

Ковариантная производная от скалярной плотности веса w
$Т.к\ g$ есть плотность веса -2, то объект $g^{w/2}$ есть скалярная плотность веса w
Т.е. $(\mathcal{J}^2)^{-\frac{w}{2}} = \mathcal{J}^{-w}$, где $w -$ вес
Найдем $(g^{-\frac{w}{2}})_{;i} = (g^{-\frac{w}{2}})_{,i} + \widetilde{K}_{,i} g^{-\frac{w}{2}}$,
где $\widetilde{K}_{,i} -$ неизвестная функция
$(g^{-\frac{w}{2}})_{,i} = -\frac{w}{2} g^{-\frac{w}{2}-1} \cdot g_{,i} = -w g^{-\frac{w}{2}-1} \cdot g \cdot \Gamma_{ki}^k = -w g^{-\frac{w}{2}} \cdot \Gamma_{ki}^k$
Полагая $\widetilde{K}_{,i} \equiv w \cdot \Gamma_{ki}^k$
Получим
$(g^{-\frac{w}{2}})_{;i} = -w g^{-\frac{w}{2}} \cdot \Gamma_{ki}^k + w \cdot \Gamma_{ki}^k g^{-\frac{w}{2}} = 0$

Любую тензорную плотность $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}$ веса w можно предсавить как
$\mathcal{F}_m^m = g^{-\frac{w}{2}} \cdot F_m^m$, где $F_m^m -$ тензор $\quad =>$
$(\mathcal{F}_m^m)_{;i} = g^{-\frac{w}{2}} \cdot (F_m^m)_{;i}$ – ф-ла неудобна, т.к. небходимо найти $\mathrm{F}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}$
Для определенности $\mathcal{F}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{m}} = \mathcal{F}_l^k$
$\mathcal{F}_l^k = g^{-\frac{w}{2}} \cdot F_l^k$
$(\mathcal{F}_l^k)_{;i} = g^{-\frac{w}{2}} \cdot (F_l^k)_{;i} = g^{-\frac{w}{2}} F_{l,i}^k + g^{-\frac{w}{2}} \Gamma_{mi}^k F_l^m - g^{-\frac{w}{2}} \Gamma_{li}^m F_m^k = g^{-\frac{w}{2}} F_{l,i}^k +$
$\Gamma_{mi}^k \mathcal{F}_l^m - \Gamma_{li}^m \mathcal{F}_m^k$
-

$(g^{-\frac{w}{2}}F_l^k)_{,i} = g^{-\frac{w}{2}}{}_{,i}\cdot F_l^k + g^{-\frac{w}{2}}\cdot F_{l,i}^k \quad , \; F_l^k \equiv \mathcal{F}_{l,i}^k \quad =>$

$g^{-\frac{w}{2}}\cdot F_{l,i}^k \;\; = \mathcal{F}_{l,i}^k \;\; - g^{-\frac{w}{2}}{}_{,i}\cdot F_l^k = \mathcal{F}_{l,i}^k \;\; + \frac{w}{2} g^{-\frac{w}{2}-1}\cdot g_{,i}\cdot F_l^k = \mathcal{F}_{l,i}^k \;\; +$

$\frac{w}{2} g^{-\frac{w}{2}-1}(2\cdot g\cdot \Gamma_{mi}^m)\cdot\; F_l^k = \mathcal{F}_{l,i}^k \;\; + w\cdot g^{-\frac{w}{2}}\cdot \Gamma_{mi}^m\cdot F_l^k = \mathcal{F}_{l,i}^k \;\; + w\cdot \Gamma_{mi}^m \mathcal{F}_l^k$

$=>$

$$\boxed{(\mathcal{F}_l^k)_{;i} = \mathcal{F}_{l,i}^k \;\; + \; w\cdot \Gamma_{mi}^m \mathcal{F}_l^k + \Gamma_{mi}^k \mathcal{F}_l^m - \Gamma_{li}^m \mathcal{F}_m^k}$$

Где $w\cdot \Gamma_{mi}^m \mathcal{F}_l^k -$ дополнительное слагаемое

ЗАДАЧА

Вычислить ковариантную производную от E^{ijkl}- плотность веса (w=-1)

$\mathrm{E}^{klmn}{}_{;i} = 0 + (-1)\cdot \Gamma_{pi}^p \mathrm{E}^{klmn} + \Gamma_{pi}^k \mathrm{E}^{plmn} + \Gamma_{pi}^l \mathrm{E}^{kpmn} + \Gamma_{pi}^m \mathrm{E}^{klpn} + \Gamma_{pi}^n \mathrm{E}^{klmp}$

Рассмотрим

$\Gamma_{pi}^k \mathrm{E}^{plmn} = \Gamma_{ki}^k \mathrm{E}^{klmn}$

Сумма по p,но ненулевые значения, если k,l,m,n – разные =>

Из суммы «выживет» только слагаемое, в котором суммы по k нет

=>

$$\Gamma_{pi}^k \mathrm{E}^{plmn} + \Gamma_{pi}^l \mathrm{E}^{kpmn} + \Gamma_{pi}^m \mathrm{E}^{klpn} + \Gamma_{pi}^n \mathrm{E}^{klmp} = \Gamma_{ki}^k \mathrm{E}^{klmn} + \Gamma_{li}^l \mathrm{E}^{klmn} + \Gamma_{mi}^m \mathrm{E}^{klmn} + \Gamma_{ni}^n \mathrm{E}^{klmn}$$

Нет суммы по k,l,m,n

$\Gamma_{ki}^k \mathrm{E}^{klmn} + \Gamma_{li}^l \mathrm{E}^{klmn} + \Gamma_{mi}^m \mathrm{E}^{klmn} + \Gamma_{ni}^n \mathrm{E}^{klmn} = \mathrm{E}^{klmn}(\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2 + \Gamma_{3i}^3 + \Gamma_{4i}^4)$

Т.к. все klmn должны быть разные (иначе 0)

$$\mathrm{E}^{klmn}{}_{;i} = (-1)\left(\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2 + \Gamma_{3i}^3 + \Gamma_{4i}^4\right)\cdot \mathrm{E}^{klmn} + \mathrm{E}^{klmn}\left(\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2 + \Gamma_{3i}^3 + \Gamma_{4i}^4\right) = 0$$

Таким образом

$$\boxed{\mathrm{E}^{klmn}{}_{;i} = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{E}^{i_1 i_2 \dots i_N}{}_{;i} = 0}$$

ЗАДАЧА

Доказать, что $\Gamma_{mi}^i = \frac{1}{2}\frac{\partial(lng)}{\partial q^m}$

$\Gamma_{mi}^i = \frac{1}{2} g^{ik}\left(g_{km,i} + g_{ki,m} - g_{mi,k}\right) = \frac{1}{2}\left(\cancel{g^{ik} g_{km,i}} + g^{ik} g_{ki,m} \cancel{- g^{ik} g_{mi,k}}\right), i \leftrightarrow k$

$$\Gamma^i_{mi} = \frac{1}{2} g^{ik} g_{ki,m}$$
$$g_{,m} = g \cdot g^{ik} g_{ik,m}$$
$$\Gamma^i_{mi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} \cdot g_{,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial (lng)}{\partial q^m}$$